

云杉木材钢琴共振板振动特性的研究

刘镇波 刘一星 沈 隽 苗媛媛
(东北林业大学生物质材料科学与技术教育部重点实验室)

摘要:钢琴共振板是钢琴最重要的部件之一,对钢琴声学品质有决定性的影响。研究共振板振动特性对提高钢琴产品质量具有重要的意义。该文在分析钢琴共振板基本振动理论的基础上,得出了自由振动的频率方程。并以俄罗斯远东红皮云杉、东北长白鱼鳞云杉、西藏林芝云杉、美国西加云杉4个树种共8块共振板(每个树种2块)为研究对象,采用基于打击音的快速傅立叶变换频谱分析方法,测定了计算共振板弹性模量等参数所必须的(2,0)、(0,2)、(1,1)、(2,2)阶振动频率。应用自由振动频率方程计算了共振板的弯曲刚度与扭转刚度,进而计算共振板不同方向的动态弹性模量、纵波传播速度。分析共振板振动特性与钢琴声学品质主观评价、客观评价指标之间的关系得出,共振板y方向振动特性与钢琴声学品质之间的关系比x方向显著。随着共振板的弹性模量与纵波传播速度的增大,钢琴声学品质提高,尤其是共振板y方向的弹性模量与纵波传播速度值,对钢琴声学品质影响显著。这也说明了共振板y方向的振动特性参数检测对于钢琴声学品质评价的重要性。

关键词:云杉木材;钢琴;共振板;振动特性;声学品质

中图分类号:S781.3 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-1522(2008)05-0129-05

LIU Zhen-bo; LIU Yi-xing; SHEN Jun; MIAO Yuan-yuan. **Vibration properties of piano resonance board from spruce wood.** *Journal of Beijing Forestry University* (2008) 30(5) 129-133 [Ch, 19 ref.] Key Laboratory of Bio-based Material Science and Technology of Ministry of Education, Northeast Forestry University, Harbin, 150040, P. R. China.

Resonance board is one of the most important components of piano, which predominate the acoustical quality. The frequency equation of free vibration for resonance boards on the basis of vibration theory was established. The resonant frequencies of (2,0), (0,2), (1,1) and (2,2) of all the 8 pieces of resonance boards made from the species of *P. glehnii*, *P. jezoensis*, *P. spinosa* and *P. sitchensis* were determined using the spectrum analysis method based on fast Fourier transform. The flexural and torsional rigidities were calculated using the established frequency equation and further the moduli of elasticity and transmitting velocity of longitudinal wave (V_L) were also calculated. The subjective and objective evaluations of piano acoustical quality combined with vibration properties displayed that the vibration in y -direction correlated more with acoustical quality than in x -direction. The acoustical quality was improved with the increase in MOE and V_L , especially in y -direction. The results show that the parameter measurement of vibration properties in y -direction is more important to the acoustical quality of piano.

Key words spruce wood; piano; resonance board; vibration properties; acoustical quality

钢琴的声源虽然来自琴弦,但如果去掉音板,我们听到的则仅仅是极微弱的钢丝振动之声,绝然不是钢琴的美妙乐音。钢琴发出的特殊声音,来自音板的结构及构成这一结构的材料和工艺方法。钢琴音板主要由共振板、肋木、音板框等组成。共振板为一块较薄(厚度为8 mm左右)的板片,通常由80~

100 mm宽的板条拼粘在一起组成,它的振动特性决定了音板的质量。因此,研究钢琴共振板振动特性对提高钢琴产品质量具有重要的意义。

沈阳音乐学院的刘宝利等^[1-3]采用模态分析技术对小型三角钢琴的音板进行分析,得到了音板的前10阶固有频率及其他参数,并用有限元分析方法

收稿日期:2007-09-30

http://www.bjfujournal.cn, http://journal.bjfu.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金项目(30070607)、东北林业大学青年科研基金项目(07014)。

第一作者:刘镇波,博士。主要研究方向:木材物理学。电话:13945697965 Email: nefulzb@yahoo.com.cn 地址:150040哈尔滨市东北林业大学材料科学与工程学院 Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对其进行振动计算。孙朝平^[4]简单的探讨了钢琴音板的制造工艺。国外的研究相对较多, Sobue 等^[5]采用振动法研究了各向异性材料木材的动态应力应变关系, 并测量了其复合泊松比。Sobue 等^[6]采用平板振动技术测定了各向异性木板的弹性系数, 重点分析了振动频率的识别与归属, 并编写了计算机程序以实现板振动的前 10 个共振频率的识别。Tonosaki 等^[7]为解明乐器与木材属性之间的关系, 以 21.5 cm 长的正方形(纵向-径向)西加云杉(*Picea sitchensis*)板为研究对象, 测定了平板振动时的振动模式与损耗正切, 结果表明通过测定弦向和径向振动的复合共振曲线, 可找出板的振动模式和发音衰减之间的关系。他又以板振动实验方法测定了 12 种木材纵向与径向的弹性模量、损耗正切, 并记录了板振动的频率响应曲线。Nakao^[8-9]以自由梁的振动理论测定了西加云杉板的复合弹性模量、复合剪切模量、复合泊松比, 分析得出各向异性、粘弹性板的振动理论, 用该理论计算的自由、正方形板的共振频率及损耗正切与实验结果有很高的一致性。在做成钢琴后的整块音板振动的研究方面, Yanagisawa 等^[10]最早采用有限元法分析了钢琴琴弦与音板的振动。Suzuki^[11]以世界名琴斯坦威三角钢琴为研究对象, 开展了钢琴音板的振动与声音辐射的研究, 在实验时, 用特制的框架固定音板的边缘, 此时的音板不受琴弦的影响, 用振动实验的方法可测出音板固有频率和相应的振形。

钢琴共振板的研究主要集中在对小尺寸单一板(不是由几块素材板胶拼成的共振板)和制成钢琴后的音板的振动研究上, 而对实际钢琴共振板(由多块素材胶拼而成)的振动理论及其振动特性对钢琴声学品质影响的研究较少。本文以钢琴共振板为对象, 研究共振板的振动特性, 旨在为研究共振板振动特性对钢琴声学品质影响奠定理论基础。

1 基本振动理论

立式钢琴的共振板由云杉属(*Picea* sp.)木材板条斜向胶拼而成, 是各向异性体材料, 共振板的长度、宽度方向尺寸远大于厚度尺寸, 可将其视为矩形

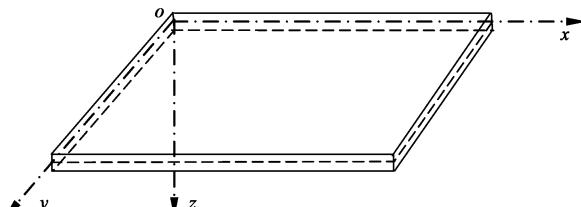


图 1 板的坐标系统

FIGURE 1 The coordinate system of wood board

薄板^[12], 板的坐标系统如图 1 所示。因此, 可以应用各向异性的矩形薄板振动理论对钢琴共振板的振动特性进行求解^[13-17]。根据广义虎克定律, 各向异性弹性体的物理方程式经简化后得式(1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x + \frac{\mu_y}{E_y} \sigma_y \\ \epsilon_y = \frac{\mu_x}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (1)$$

式中, ϵ_x 为 x 方向的应变, ϵ_y 为 y 方向的应变, γ_{xy} 为剪切应变, σ_x 为 x 方向的应力, σ_y 为 y 方向的应力; τ_{xy} 为剪切应力, E_x 为 x 方向弹性模量, E_y 为 y 方向弹性模量, G 为剪切模量。

变换式(1)得出薄板应力方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{1}{1 - \mu_x \mu_y} (E_x \epsilon_x + \mu_x E_y \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{1}{1 - \mu_x \mu_y} (E_y \epsilon_y + \mu_y E_x \epsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{array} \right. \quad (2)$$

式中, μ_x 为 x 方向泊松比, μ_y 为 y 方向泊松比。

将小挠度薄板的几何方程代入式(2)得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{z}{1 - \mu_x \mu_y} \left(E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_x E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = \frac{z}{1 - \mu_x \mu_y} \left(E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_y E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -z \left(2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

式中, w 为变形挠度。

可将薄板微元弯矩和扭矩用挠度 w 表示:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (4)$$

式中, M_x 为 x 方向微元弯矩, M_y 为 y 方向微元弯矩, M_{xy} 为微元扭矩; D_{11} 、 D_{22} 为薄板在弹性主方向的抗弯刚度, D_{66} 为薄板在弹性主方向的抗扭刚度, 三者都称为主刚度。并且,

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} \\ D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} \\ D_{66} = \frac{G h^3}{12} \end{array} \right. \quad (5)$$

式中, h 为薄板厚度。

将式(4)代入薄板微元在 z 轴方向的平衡条件

方程(弯矩方程), 得正交异性薄板横向弯曲微分方程为:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q = 0 \quad (6)$$

式中, q 为外载荷, D_3 为折算刚度。并且:

$$D_3 = \frac{D_{11} \mu_y}{2} + \frac{D_{22} \mu_x}{2} + 2 \frac{Gh^3}{12} = D_{12} + 2D_{66} \quad (7)$$

式中, $D_{12} = \frac{D_{11} \mu_y}{2} + \frac{D_{22} \mu_x}{2}$ 。

因此, 可得正交异性薄板横向自由振动的微分方程为:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式中, ρ 为薄板密度。

为解自由振动的微分方程, 可设变形挠度 w 为:

$$w = Y(t)W(x, y) = Y(t) \sum e^{\frac{k_m x}{a}} \sum e^{\frac{k_n y}{b}} \quad (9)$$

式中, t 为时间, $Y(t)$ 为时间的函数, k_m 、 k_n 为由边

$$f_r(m, n) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \sqrt{D_{11} \frac{\alpha_1(m, n)}{a^4} + D_{22} \frac{\alpha_2(m, n)}{b^4} + 2D_{12} \frac{\alpha_3(m, n)}{a^2 b^2} + 4D_{66} \frac{\alpha_4(m, n)}{a^2 b^2}} \quad (13)$$

式中, $f_r(m, n)$ 为第 (m, n) 阶共振频率, 常系数 $\alpha_1(m, n)$ 、 $\alpha_2(m, n)$ 、 $\alpha_3(m, n)$ 、 $\alpha_4(m, n)$ 可由参考文献[8]得到。

2 材料与方法

2.1 材料

选择适合制作乐器音板的俄罗斯远东红皮云杉 (*Picea koraiensis*)、东北长白鱼鳞云杉 (*Picea jezoensis* var. *komarovii*)、西藏林芝云杉 (*Picea likiangensis* var. *linzhiensis*)、美国西加云杉 4 个树种作为试件, 制作 8

块钢琴共振板(每个树种均为 2 块), 共振板尺寸为 1 408 mm(x 方向) \times 937 mm(y 方向) \times 8 mm(厚度)。

将式(9)代入式(8), 并解方程得:

$$P_{mn}^2 Y(t) + 2\epsilon \frac{dY(t)}{dt} + \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = 0 \quad (10)$$

其中:

$$P_{mn} = \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \sqrt{D_{11} \left(\frac{k_m}{a} \right)^4 + D_{22} \left(\frac{k_n}{b} \right)^4 + D_3 \left(\frac{k_m k_n}{ab} \right)^2} \quad (11)$$

式中, P_{mn} 为振动圆周频率, $2\epsilon/P_{mn}$ 为损耗正切。

若损耗正切较小, 则共振频率为:

$$\begin{aligned} f_r(m, n) = \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \sqrt{D_{11} \left(\frac{k_m}{a} \right)^4 + D_{22} \left(\frac{k_n}{b} \right)^4 + D_3 \left(\frac{k_m k_n}{ab} \right)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

对于各向异性木质薄板的自由振动, 还未有精确的 k_m 与 k_n 系数计算方法。用瑞利-里兹法能够较好地估计这两个系数, 进而估计薄板的振动频率 $f_r(m, n)$, 因此, 可得出钢琴共振板自由振动的频率方程:

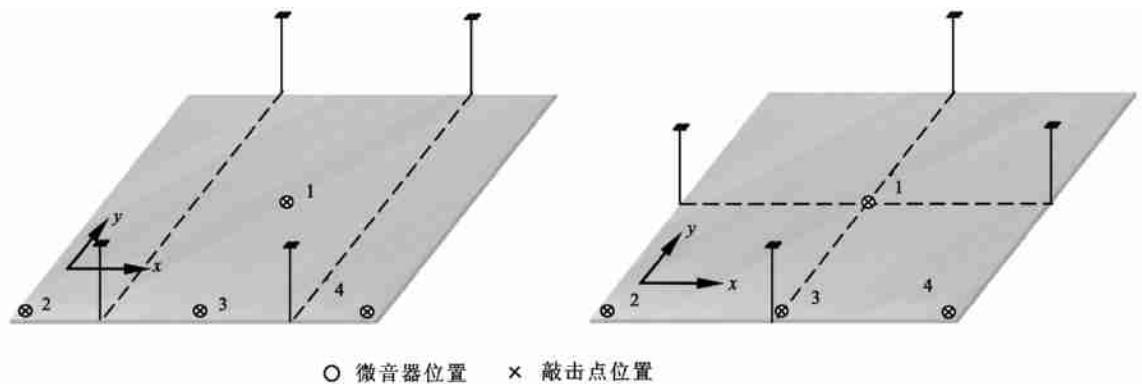


图 2 钢琴共振板振动测量示意图

FIGURE 2 Sketch map of vibration measurement for piano resonance board

注: 1~4 为测量点编号。

3 结果与分析

3.1 共振板振动模态的识别与分析

从钢琴共振板基本振动理论可知,只要解出共振板自由振动的频率方程(式(13))中的未知参数 D_{11} 、 D_{12} 、 D_{22} 、 D_{66} ,就可求出钢琴共振板的弹性模量、剪切模量等参数。钢琴共振板的振动频率可通过板的振动实验求得。因为方程中包含4个未知参数,所以若要解式(13),则至少应测出4个频率,即(2,0)、(0,2)、(1,1)、(2,2)。

如何准确的测出(2,0)、(0,2)、(1,1)、(2,2)4阶振动频率,直接影响着钢琴共振板弹性模量、剪切模量等参数的精确性。板的二维振动模式相对于梁的一维振动模式复杂得多,对板振动频谱图解析也更加困难。因此,在研究中采用几种方法相结合的方式进行各阶振动频率的识别与分析。

1)在各阶共振频率中,一般(1,1)或者(2,0)最小,因此可初步判断最低的共振频率为(1,1)或者(2,0)。

2)根据各阶振动频率的振型特点,选取不同的敲击点,并将微音器放置在不同位置,逐一测试,以突出各阶振动频率,这样有利于不同阶次振动频率的确定。

3)若仍不能确定(2,0)、(0,2)、(1,1)、(2,2)4阶频率的归属,还可进行时域数据的加减,再进行傅立叶变换,也可突出不同阶次的振动频率(如(0,2)、(1,1)、(2,2)阶次等)。

4)可利用(2,0)频率大致地估计(0,2)阶次的频率。

3.2 弹性模量与纵波传播速度

共振的弹性模量可表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{12}{h^3} D_{11} (1 - \mu_x \mu_y) = \frac{12}{h^3} D_{11} \mu \\ E_y = \frac{12}{h^3} D_{22} (1 - \mu_x \mu_y) = \frac{12}{h^3} D_{22} \mu \end{array} \right. \quad (14)$$

式中, μ 为泊松比。

对共振板的振动实验所得的振动频谱图进行振动频率归属分析后,计算得出4个树种8张共振板的 x 方向与 y 方向的弹性模量,见表1。

表1 共振板不同方向的弹性模量值 GPa

TABLE 1 Elastic modulus of resonance board in different directions

A(俄罗斯远东红皮云杉)		B(东北长白鱼鳞云杉)		C(西藏林芝云杉)		D(美国西加云杉)	
A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2
E_x	4.659	4.739	4.469	4.809	3.013	3.975	4.881
E_y	4.855	6.069	5.114	5.502	3.112	4.468	5.056

在钢琴共振板的振动中,伴随着纵波的传播,会产生轻微的横向延展,因此,为消除横向延展的影响,须在纵波传播速度的计算时增加泊松比量,才能使计算的共振板纵波传播速度更为精确^[19]。计算共振板纵波传播速度的公式可表达为:

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \mu^2)}} \quad (15)$$

式中, C 为共振板纵波传播速度。

在应用式(15)计算共振板的纵波传播速度时,不同方向的纵波传播速度需采用不同方向的弹性模量与泊松比。共振板 x 方向与 y 方向的纵波传播速度值(C_x 、 C_y)计算结果列于表2。

表2 共振板不同方向的纵波传播速度 $m \cdot s^{-1}$

TABLE 2 The transmitting velocity of longitudinal wave of resonance board

A		B		C		D	
A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2
C_x	3 620.0	3 440.0	3 526.9	3 724.6	2 687.2	3 072.2	3 518.2
C_y	3 695.6	3 893.1	3 773.1	3 983.9	2 730.8	3 257.3	3 580.5

3.3 共振板振动特性与钢琴声学品质之间的关系

将共振板制成实验用钢琴后,研究了共振板振动特性与钢琴声学品质主观评价得分、客观评价指标之间的相关性,具体研究限于篇幅不在本文详述。

钢琴声学品质主观评价的主要评价指标为音色优美、高音明亮、中音柔和、低音浑厚、音域连贯、声音纯净、表现层次7个指标评语项及总体音质评语项。通过统计计算得出7个指标评语项的总项平均得分,并求得总项平均得分与总体音质项得分的计权得分。分析共振板的振动参数与总项平均得分、总体音质得分及计权得分3项主观评价得分项目之间的关系得出:共振板 y 方向的振动特性参数与钢琴声学品质主观评价得分项目之间呈一定程度或显著的线性正相关。说明随着共振板 y 方向的弹性模量、纵波传播速度增大,钢琴声学品质主观评价得分也增大;而共振板 x 方向的振动特性参数与钢琴声学品质主观评价得分项目之间的相关关系明显弱于 y 方向。因此,通过改善共振板 y 方向的振动特性可显著提高钢琴的声学品质。

钢琴声学品质客观评价的指标为强奏音强值、弱奏音强值、音长值及音色等。通过对音色频谱数据的分析,又提取出分音振幅平均值、分音振幅极值变化范围及分音振幅值逐阶变化值3个指标。分析共振板的振动参数与钢琴声学品质客观评价指标之间的关系得出:共振板 y 方向弹性模量值、纵波传播速度值与钢琴强奏、弱奏音强值之间呈密切的线性正相关,其相关性大于共振板 x 方向;共振板的弹性模量、纵波传播速度(尤其是 y 方向的弹性模

量、纵波传播速度)增大时,分音振幅平均值呈增大趋势,而分音振幅极大值与极小值之比的平均值、分音振幅值逐阶变化值呈降低趋势。这说明钢琴的音量得到增强,音板的声辐射衰减相对降低,提高了音板的声辐射能力,音色频谱包络线更加平滑,使钢琴的音色更加优美。

分析共振板振动特性与钢琴声学品质主观评价得分、客观评价指标之间的相关性得出同一规律:共振板 y 方向的振动参数与钢琴声学品质之间的关系明显比 x 方向显著,即共振板 y 方向的振动参数对钢琴声学品质的影响更为显著。这说明了共振板 y 方向的振动特性参数检测对于钢琴声学品质评价的重要性,也说明改善共振板 y 方向的振动特性可显著提高钢琴的声学品质。

共振板 y 方向的振动特性参数与钢琴声学品质主观评价得分、客观评价指标之间的相关性大于 x 方向的原因,可能与音板上高、中音区域的琴弦排列与音板的 y 方向接近平行、低音区域琴弦排列与 y 方向的夹角小于 x 方向的结构特点有关。

4 结 论

本研究分析了钢琴共振板的振动理论,采用多点测量的方式识别出共振板的(2,0)、(0,2)、(1,1)、(2,2)阶频率,解出共振板自由振动的频率方程,最终计算得出共振板的弹性模量、纵波传播速度。通过对共振板振动特性与钢琴声学品质主观评价得分、客观评价指标之间的相关性研究得出,共振板 y 方向振动特性与钢琴声学品质之间的关系比 x 方向显著,即共振板的弹性模量、纵波传播速度大时(尤其是 y 方向的弹性模量、纵波传播速度),所制作的钢琴的声学品质更优良,说明通过改善共振板 y 方向的振动特性可显著提高钢琴的声学品质,也说明了共振板 y 方向的振动特性参数检测对于钢琴声学品质评价的重要性。

参 考 文 献

- [1] 刘宝利, 韩二中. 钢琴音板振动的实验模态分析[J]. 乐器, 1991(2):8~10.
LIU B L, HAN E Z. The experimental modal analysis of vibration of piano soundboard [J]. *Musical Instrument*, 1991(2):8~10.
- [2] 刘宝利, 韩二中. 钢琴音板振动的实验模态分析(续) [J]. 乐器, 1991(3):8~12.
LIU B L, HAN E Z. The experimental modal analysis of vibration of piano soundboard (continue) [J]. *Musical Instrument*, 1991(3):8~12.
- [3] 刘宝利. 钢琴音板振动的有限元分析[J]. 乐器, 1992(2):1~4.
LIU B L. The finite element analysis of vibration of piano soundboard [J]. *Musical Instrument*, 1992(2):1~4.
- [4] 孙朝平. 钢琴音板之我见[J]. 乐器, 2004(9):8~9.
SUN C P. My viewpoint on piano soundboard [J]. *Musical Instrument*, 2004(9):8~9.
- [5] SOBUE N, TAKEMURA T. Poisson's ratios in dynamic viscoelasticity of wood as two-dimensional materials [J]. *Mokuzai Gakkaishi*, 1979, 25(4): 258~283.
- [6] SOBUE N, KITAZUMI M. Identification of power spectrum peaks of vibrating completely free wood plates and moduli of elasticity measurements [J]. *Mokuzai Gakkaishi*, 1991, 37(1): 9~15.
- [7] TONOSAKI M, OKANO T, ASANO I. Measurement of plate vibration as a testing method of wood for musical instruments [J]. *Mokuzai Gakkaishi*, 1985, 31(3): 152~156.
- [8] NAKAO T, OKANO T, ASANO I. Vibrational properties of a wooden plate [J]. *Mokuzai Gakkaishi*, 1985, 31(10): 793~800.
- [9] NAKAO T. Experimental study of torsional vibration of wooden bars by plate theories [J]. *Mokuzai Gakkaishi*, 1996, 42(1): 10~15.
- [10] YANAGISAWA T, NAKAMURA K, SHIRAYANAGI I. Vibration analysis of piano string and sound board by finite element method [J]. *The Journal of the Acoustical Society of Japan*, 1975, 31(11): 661~666.
- [11] SUZUKI H. Vibration and sound radiation of a piano soundboard [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1986, 80: 1 573~1 582.
- [12] 黄克智. 板壳理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
HUANG K Z. *Principle of plate and shell* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1987.
- [13] JOZSEF B, BENJAMIN A J. *Mechanics of wood and wood composites* [M]. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc, 1982: 87~99.
- [14] VOICHTA B. *Acoustics of sound* [M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006: 40~48.
- [15] 成祥生. 应用板壳理论[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989: 214~217.
CHENG X S. *Application principle of plate and shell* [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1989: 214~217.
- [16] 王克林, 刘俊卿, 赵冬. 平板的弯曲、振动和屈曲[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2006.
WANG K L, LIU J Q, ZHAO D. *Bend, vibration and flexuosity of plate* [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2006.
- [17] SOBUE N, KATO A. Simultaneous determination of orthotropic elastic constants of standard full-size plywoods by vibration method [J]. *Mokuzai Gakkaishi*, 1992, 38(10): 895~902.
- [18] HEARMON R F S. *An introduction to applied anisotropic elasticity* [M]. London: Oxford Univ Press, 1961: 90~109.
- [19] THOMAS D R, NEVILLE H F. *Principles of vibration and sound* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2004: 71.

(责任编辑 李文军)