

# 单一平面电容传感器数学模型的数值解法

刘少刚<sup>1</sup> 孟庆鑫<sup>1</sup> 罗跃生<sup>2</sup> 王珏<sup>2</sup> 田勇臣<sup>3</sup>

(1 哈尔滨工程大学机电工程学院 2 哈尔滨工程大学理学院 3 北京林业大学工学院)

**摘要:**单一平面电容传感器是用来测量木材含水率的高精度仪器,属于具有任意结构形状的电容传感器的特例。为研究单一平面传感器数学模型的数值解法,以一种设定了具体尺寸的单一平面电容传感器为例,利用数值分析的一个数值方法——差分离散格式,对笔者前期建立的任意结构形状的电容传感器的偏微分方程数学模型构造了便于计算和研究的离散近似模型。利用该近似模型对单一平面电容传感器的工作状况进行分析,得到了木材介电常数与传感器电容值的关系。

**关键词:**电容传感器;木材含水率;数学模型;数值解法;介电常数

**中图分类号:**TP212   **文献标志码:**A   **文章编号:**1000-1522(2009)04-0135-06

LIU Shao-gang<sup>1</sup>; MENG Qing-xin<sup>1</sup>; LUO Yue-sheng<sup>2</sup>; WANG Jue<sup>2</sup>; TIAN Yong-chen<sup>3</sup>. Numerical solutions of a mathematical model for a single planar capacitance sensor. *Journal of Beijing Forestry University* (2009) 31(4) 135-140 [Ch, 8 ref.]

1 College of Mechanical and Electrical Engineering, Harbin Engineering University, 150001, P. R. China;

2 College of Science, Harbin Engineering University, 150001, P. R. China;

3 School of Technology, Beijing Forestry University, 100083, P. R. China.

Accurate mathematical models for capacitance sensor with an arbitrary shape structure are available. Single planar capacitance sensor is a kind of high-precision equipment which can be used to measure wood moisture content. It is a special capacitance sensor with an arbitrarily shaped structure. However, it is difficult to solve the partial differential equations involved in the mathematical model for analyzing the working conditions of capacitance sensors with an arbitrary shape structure. For a single planar capacitance sensor, its precise analytical solution cannot be resolved. Therefore, solving the mathematical model for a single planar capacitance sensor is the main objective of this paper. A single planar capacitance sensor with its specific size was taken as an example in this paper. Discretized differential numerical analysis method was applied to construct the discretized approximate model. The model was convenient to solve differential equations developed in the past. An approximate model is adopted to analyze working conditions of single planar capacitance sensors and to find the relationship between wood dielectric constant ( $\epsilon$ ) and the capacitance value ( $C$ ) of capacitance sensors. Findings from this study can be applied to the practice of engineering and the method developed can be extended to single planar capacitance sensors of general size and structure.

**Key words** capacitance sensor; wood moisture content; mathematical model; numerical solution; dielectric constant

根据物理原理可知,在电容器中加入不同的电介质,会使得电容器有不同的电容量。利用这一性质,人们已经制造出了许多具有不同用途的电容传感器。诸如测量液位、压力、位移<sup>[1]</sup>、加速度、介电常

数<sup>[2-3]</sup>、含水率<sup>[4-5]</sup>等的电容传感器都是利用电容器的这一特性制造的。它们通常具有体积小、结构简单、响应时间短、分辨率高等突出优点。由于检测头结构简单,所以能承受相当大的温度变化及各种辐

收稿日期:2008-07-21

<http://www.bjfujournal.cn>, <http://journal.bjfu.edu.cn>

基金项目:“948”国家林业局引进项目(2003-4-29)。

第一作者:刘少刚,教授,博士生导师。主要研究方向:机械电子工程。电话:0451-82519701 Email:liushaogang@hrbeu.edu.cn 地址:150001 哈尔滨工程大学机电工程学院。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

射作用,可在强烈振动、灰尘等恶劣条件下工作。近些年来电容传感器的研究应用越来越受到人们的广泛关注,本文将要研究的就是其中一种用于木材含水率检测的单一平面电容传感器。

在木材工业中,木材含水率检测应用的单一平面电容传感器都采用大量实验或近似数学模型制得,难以控制和分析误差。鉴于此,并注意到木材的介电常数与其含水率存在着一一对应的关系,作者在前期研究了用于测量介电常数、具有任意几何结构形状的电容传感器<sup>[6]</sup>。利用静电场及静电场中的导体和电介质的性质等相关理论,在电极和被测物处于任意几何结构形状和任意空间相对位置的状态下,建立了测量介电常数的电容传感器的精确数学模型。以经典物理学中已知结果的球形电容传感器为算例,得到了与传统电磁场理论中完全一样的结果,验证了建立的数学模型。这一研究成果为木材含水率检测中应用的单一平面电容传感器的精确数值解法提供了基础。

单一平面电容传感器是用来测量木材含水率的高精度仪器,属于具有任意结构形状的电容传感器的特例,处于无法得到精确的解析解的状态。因此,本文的主要工作就是研究单一平面传感器的精确数值解法。

## 1 单一平面电容传感器的工作状况及原理

针对单一平面电容传感器的特点,首先讨论其工作原理。

单一平面电容传感器的结构如图1所示。首先取两金属板作为检测电容器的两极,并固定在某特定的空间位置(如图1中的D<sub>1</sub>、D<sub>2</sub>),则两检测电容器电极间的电容量将受到周围环境的影响。当周围其他环境不变时,如果把被测的木材放入检测电容器两极形成的电场中,假设被测物体的尺寸、形状都是确定的,检测电容的电容量将由被测木材的介电常数唯一确定,且该电容量为介电常数的一对一的单值函数。所以可以通过测量检测电容器的电容量,来得到木材的介电常数。又因为在一定的条件下木材的介电常数可以被它的含水率唯一确定,并且介电常数和含水率的对应关系也是一对一的。所以当其他条件不改变时,可以利用该电容传感器先测量出木材的介电常数,再利用测量出的木材介电常数得到木材的含水率。这就是单一平面电容传感器的简单工作原理。

上述获得木材含水率的方法中,一个关键的问

题是找出检测电容器的电容量与被测木材的介电常数之间的函数关系。由于检测电容器的电容量很容易测得的,所以只要得到了检测电容器的电容量与被测木材的介电常数之间的函数关系,就可以方便地得到木材的含水率。

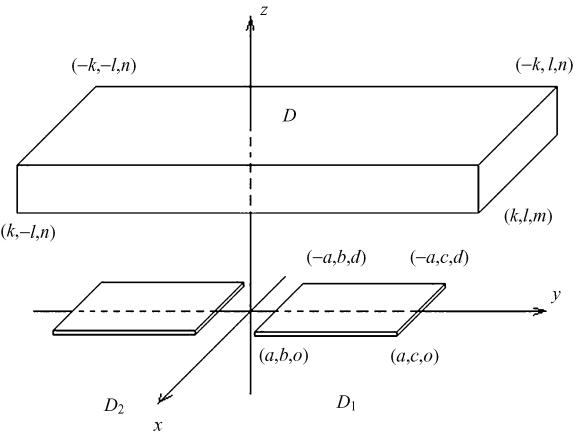


图1 单一平面电容传感器的结构简图

FIGURE 1 Sketch map of a single planar capacitance sensor

## 2 单一平面电容传感器数学模型的建立

在前期的研究成果中,已得到的具有任意结构形状的电容传感器数学模型如下<sup>[6]</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 V = 0, (x, y, z) \in \Omega \cup (R^3 - \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega) \\ V|_{\Omega_1} = V_1, V|_{\Omega_2} = V_2 \\ \lim_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\rightarrow\infty} V = 0 \\ V_i|_{\partial\Omega} = V_o|_{\partial\Omega} \\ \epsilon \frac{\partial V_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \tilde{\epsilon} \frac{\partial V_o}{\partial n}|_{\partial\Omega} \end{array} \right. \quad (1)$$

各参数含义参见文献[6]。

对于单一平面电容传感器,设两金属电极板所占据空间区域分别为

$$D_1 = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} -a < x < a, b < y < c, \\ 0 < z < d \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$D_2 = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} -a < x < a, -b > y > -c, \\ 0 < z < d \end{array} \right\} \quad (3)$$

被测木材所占据的空间区域为

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} -k < x < k, -l < y < l, \\ m < z < n \end{array} \right\} \quad (4)$$

已知D、D<sub>1</sub>、D<sub>2</sub>互不相交,通常它们也互不接触。

平面电容传感器的电容量与被测木材的介电常数间关系函数的步骤如下:

1)当被测木材和电极所占空间区域为  $D$ 、 $D_1$ 、 $D_2$ , 电极  $D_1$ 、 $D_2$  上电势  $V_1$ 、 $V_2$  都已确定时, 假设被测木材介电常数为  $\epsilon$ 。

2)由偏微分方程问题确定出电势分布函数

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, y, z) \\ \Delta^2 V = 0, (x, y, z) \in D \cup (R^3 - D_1 - D_2 - D) \\ V|_{D_1} = V_1, V|_{D_2} = V_2 \\ \lim_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\rightarrow\infty} V = 0 \\ V|_{\partial D \text{ 内}} = V|_{\partial D \text{ 外}} \\ \epsilon \frac{\partial V}{\partial n}|_{\partial D \text{ 内}} = \epsilon \frac{\partial V}{\partial n}|_{\partial D \text{ 外}} \end{array} \right. \quad (5)$$

3)求  $V(x, y, z)$  的梯度得到场强分布

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V \quad (6)$$

4)利用积分求出  $D_1$  (或  $D_2$ ) 的带电量

$$q = \iint_{D_1} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s = \epsilon \iint_{D_1} \operatorname{grad} V \cdot \vec{d}s \quad (7)$$

$$(或 q = \iint_{D_2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s = \epsilon \iint_{D_2} \operatorname{grad} V \cdot \vec{d}s)$$

5)得到检测电容器的电容量与被测物介电常数的关系式

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \quad (8)$$

式中:  $q$  为介电常数的函数。

第 2 步中, 由偏微分方程问题求电势分布函数  $V(x, y, z)$  在单一平面状态时难以得到精确解析解, 因此需要利用数值方法得到可以在工程实际中应用的近似结果。

### 3 一个数值方法——差分离散格式

为了得到符合条件的差分离散格式, 先对被测木材的棱、角处电势分布情况进行一下分析。

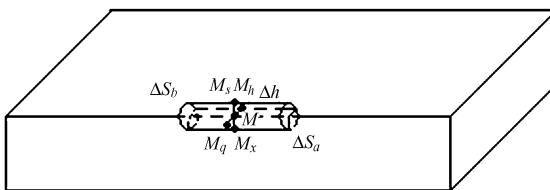


图 2 被测木材的棱处电势分布

FIGURE 2 Electric potential field at the edge of board

1)首先考虑被测木材的棱处电势分布情况。如图 2, 做以棱为轴、以棱上  $M$  点为轴的中心的圆柱。

由于圆柱内无电荷, 所以由高斯定理有

$$\iint_{\Delta S_{ao} \cup \Delta S_{bo} \cup \Delta h_o} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s + \iint_{\Delta S_{ai} \cup \Delta S_{bi} \cup \Delta h_i} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s = 0 \quad (9)$$

式中:  $\Delta h_o$ 、 $\Delta S_{ao}$ 、 $\Delta S_{bo}$ 、 $\Delta h_i$ 、 $\Delta S_{ai}$ 、 $\Delta S_{bi}$  分别为圆柱的侧面  $\Delta h$  和两底面  $\Delta S_a$ 、 $\Delta S_b$  在被测木材的外部、内部的部分。由于当圆柱的各个尺寸充分小时, 两底面  $\Delta S_a$ 、 $\Delta S_b$  是高阶小量。所以当圆柱的半径趋向于零时, 近似地有

$$\iint_{\Delta h_o} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s + \iint_{\Delta h_i} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s = 0 \quad (10)$$

由电势函数与场强的关系可以表示为

$$\iint_{\Delta h_o} \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} ds + \iint_{\Delta h_i} \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0 \quad (11)$$

又可近似地表示为

$$3\bar{\epsilon} \frac{\partial V_o}{\partial n} + \epsilon \frac{\partial V_i}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

式中:  $\frac{\partial V_o}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial V_i}{\partial n}$  分别为电势函数法向导数在被测木材的外部、内部平均值。

2)其次考虑被测木材的角处电势分布情况。如图 3 所示, 以被测木材的角  $M$  点为球心做球面  $\Delta S$ , 记它在被测木材外部、内部的部分分别为  $\Delta S_0$ 、 $\Delta S_i$ 。

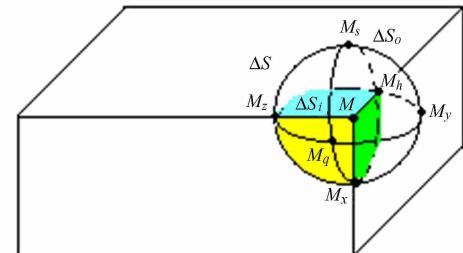


图 3 被测木材的角处电势分布

FIGURE 3 Electric potential field at the angle of board

由于球内无电荷, 所以由高斯定理有

$$\iint_{\Delta S_o} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s + \iint_{\Delta S_i} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{d}s = 0 \quad (13)$$

由电势函数与场强的关系可以表示为

$$\iint_{\Delta S_o} \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} ds + \iint_{\Delta S_i} \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0 \quad (14)$$

又可近似地表示为

$$7\bar{\epsilon} \frac{\partial V_o}{\partial n} + \epsilon \frac{\partial V_i}{\partial n} = 0 \quad (15)$$

下面建立求解上述偏微分方程问题近似解的差分格式。

由偏微分、偏导数的定义知, 当步长  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  充分小时

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right]_{(x_i, y_j, z_k)} \approx \\ & \frac{V(x_i + \Delta x, y_j, z_k) - 2V(x_i, y_j, z_k) + V(x_i - \Delta x, y_j, z_k)}{\Delta x^2} + \\ & \frac{V(x_i, y_j + \Delta y, z_k) - 2V(x_i, y_j, z_k) + V(x_i, y_j - \Delta y, z_k)}{\Delta y^2} + \\ & \frac{V(x_i, y_j, z_k + \Delta z) - 2V(x_i, y_j, z_k) + V(x_i, y_j, z_k - \Delta z)}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (16)$$

另外当被测木材的边界点  $(x_i, y_j, z_k)$  处的法线方向为  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 且步长  $\Delta h$  充分小时

$$\begin{aligned} & \left[ \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\partial D_{\text{内}}} - \tilde{\epsilon} \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\partial D_{\text{外}}} \right]_{(x_i, y_j, z_k)} \approx \epsilon \frac{V(x_i, y_j, z_k) - V(x_i - \Delta h \cos \alpha, y_j - \Delta h \cos \beta, z_k - \Delta h \cos \gamma)}{\Delta h} - \\ & \tilde{\epsilon} \frac{V(x_i + \Delta h \cos \alpha, y_j + \Delta h \cos \beta, z_k + \Delta h \cos \gamma) - V(x_i, y_j, z_k)}{\Delta h} \end{aligned} \quad (17)$$

下面我们通过一个例子, 用差分格式近似计算, 说明本文给出的理论和算法。

## 4 算例

设检测电容的两金属电极所占据空间区域分别为:

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid -3 < x < 3, 1 < y < 6, 0 < z < 3\} \quad (18)$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid -3 < x < 3, -1 > y > -6, 0 < z < 3\} \quad (19)$$

被检测木材所占据的空间区域为

$$D = \{(x, y, z) \mid -3 < x < 3, -5 < y < 5, 3 < z < 3\} \quad (20)$$

以上区域中长度单位为 cm。

此时, 空间电场电位的分布函数  $V(x, y, z)$  由式(21)确定

$$\begin{cases} \Delta^2 V = 0, (x, y, z) \in D \cup (R^3 - D_1 - D_2 - D) \\ V|_{D_1} = 1, V|_{D_2} = -1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} V = 0 \\ V|_{\partial D_{\text{内}}} = V|_{\partial D_{\text{外}}} \\ \epsilon \frac{\partial V}{\partial n}|_{\partial D_{\text{内}}} = \tilde{\epsilon} \frac{\partial V}{\partial n}|_{\partial D_{\text{外}}} \end{cases} \quad (21)$$

由于所讨论问题空间的对称性, 电极  $D_1, D_2$  上电势  $V_1, V_2$  应当是反号的。不妨假设加在电极  $D_1, D_2$  上的电势  $V_1, V_2$  分别是 1 和 -1(静电制电位单位), 被测木材介电常数为  $\epsilon$ 。这时由于整个结构的对称性知, 在  $xz$  平面电势为零, 且电势关于  $yz$  平面对称, 关于  $xz$  平面反对称。

我们取步长  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h = 1$ , 并记  $V(i, j, k) = V_{i, j, k}$ 。若近似认为在区域  $[-5, 5], [-10, 10], [-8, 8]$  外电势为零, 则由上面的讨论有近似方程组

$$V_{i, j, k} = 0 \quad i = -5, 5 \text{ 或 } j = -10, 0, 10 \text{ 或 } k = -8, 8$$

而由于对称性, 我们可以只计算  $i, j \geq 0$  时的电势值, 这时有

$$V_{i, j, k} = 0 \quad i = 5 \text{ 或 } j = 0, 10 \text{ 或 } k = \pm 8 \quad (22)$$

$$V_{i, j, k} = 1 \quad \begin{cases} i = 0, 3 \text{ 且 } 1 \leq j \leq 6 \text{ 且 } k = 0, 1, 2 \\ \text{或 } 0 \leq i \leq 3 \text{ 且 } 1 \leq j \leq 6 \text{ 且 } k = 0, 2 \\ \text{或 } 0 \leq i \leq 3 \text{ 且 } j = 1, 6 \text{ 且 } k = 0, 1, 2 \end{cases} \quad (23)$$

$$\epsilon V_{2, j, 4} + \tilde{\epsilon} V_{4, j, 4} = (\epsilon + \tilde{\epsilon}) V_{3, j, 4} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (24)$$

$$\epsilon V_{i, 4, 4} + \tilde{\epsilon} V_{i, 6, 4} = (\epsilon + \tilde{\epsilon}) V_{i, 5, 4} \quad i = 0, 1, 2 \quad (25)$$

$$\epsilon V_{i, j, 4} + \tilde{\epsilon} V_{i, j, 2} = (\epsilon + \tilde{\epsilon}) V_{i, j, 3} \quad i = 0, 1, 2; j = 1, 2, 3, 4 \quad (26)$$

$$\epsilon V_{i, j, 4} + \tilde{\epsilon} V_{i, j, 6} = (\epsilon + \tilde{\epsilon}) V_{i, j, 5} \quad i = 0, 1, 2; j = 1, 2, 3, 4 \quad (27)$$

$$\frac{\epsilon}{2} (V_{2, 5, 4} + V_{3, 4, 4}) + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4} (V_{4, 5, 4} + V_{2, 5, 4} + V_{3, 6, 4} + V_{3, 4, 4}) = (\epsilon + 3\tilde{\epsilon}) V_{3, 5, 4} \quad (28)$$

$$\frac{\epsilon}{2} (V_{2, j, 3} + V_{3, j, 4}) + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4} (V_{4, j, 3} + V_{2, j, 3} + V_{3, j, 2} + V_{3, j, 4}) = (\epsilon + 3\tilde{\epsilon}) V_{3, j, 3} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (29)$$

$$\frac{\epsilon}{2} (V_{2, j, 5} + V_{3, j, 4}) + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4} (V_{4, j, 5} + V_{2, j, 5} + V_{3, j, 6} + V_{3, j, 4}) = (\epsilon + 3\tilde{\epsilon}) V_{3, j, 5} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (30)$$

$$\frac{\epsilon}{2} (V_{i, 4, 5} + V_{i, 5, 4}) + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4} (V_{i, 4, 5} + V_{i, 6, 5} + V_{i, 5, 6} + V_{i, 5, 4}) = (\epsilon + 3\tilde{\epsilon}) V_{i, 5, 5} \quad i = 0, 1, 2 \quad (31)$$

$$\frac{\epsilon}{2} (V_{i, 4, 3} + V_{i, 5, 4}) + \frac{3\tilde{\epsilon}}{4} (V_{i, 4, 3} + V_{i, 6, 3} + V_{i, 5, 2} + V_{i, 5, 4}) = (\epsilon + 3\tilde{\epsilon}) V_{i, 5, 3} \quad i = 0, 1, 2 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{3} (V_{2,5,5} + V_{3,4,5} + V_{3,5,4}) + \\ \frac{7\tilde{\epsilon}}{6} (V_{2,5,5} + V_{4,5,5} + V_{3,6,5} + V_{3,4,5} + \\ V_{3,5,6} + V_{3,5,4}) = (\epsilon + 7\tilde{\epsilon}) V_{3,5,5} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{3} (V_{2,5,3} + V_{3,4,3} + V_{3,5,4}) + \\ \frac{7\tilde{\epsilon}}{6} (V_{2,5,3} + V_{4,5,3} + V_{3,6,3} + \\ V_{3,4,3} + V_{3,5,2} + V_{3,5,4}) = (\epsilon + 7\tilde{\epsilon}) V_{3,5,3} \end{aligned} \quad (34)$$

其他点满足

$$\begin{aligned} 6V_{0,j,k} = V_{1,j,k} + V_{1,j,k} + V_{0,j+1,k} + \\ V_{0,j-1,k} + V_{0,j,k+1} + V_{0,j,k-1} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 6V_{i,j,k} = V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k} + V_{i,j+1,k} + \\ V_{i,j-1,k} + V_{i,j,k+1} + V_{i,j,k-1} \end{aligned} \quad (36)$$

又由于

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{|V_1 - V_2|} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_1} \tilde{\epsilon} \vec{E} \cdot \vec{d}s \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \iint_{D_1} \text{grad} V \cdot \vec{d}s \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \iint_{D_1} \frac{\partial V}{\partial n} d_s \end{aligned} \quad (37)$$

类似于前面对被测木材的棱、角处电势分布情况的讨论, 在得到各结点的电势函数近似值后, 电容近似地等于

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{|V_1 - V_2|} = \frac{1}{2} \iint_{D_1} \tilde{\epsilon} \vec{E} \cdot \vec{d}s = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \iint_{D_1} \text{grad} V \cdot \vec{d}s = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \iint_{D_1} \frac{\partial V}{\partial n} d_s \\ &\approx 2 \left[ \tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{4,1,0} + 1 + 1 - V_{3,1,-1}}{6} \right) \frac{7}{8} 4\pi + \right. \\ &\quad \tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{3,1,3} + 1 + 1 - V_{4,1,2}}{6} \right) \frac{7}{8} 4\pi + \\ &\quad \tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{3,7,0} + 1 - V_{4,6,0} + 1 - V_{3,6,-1}}{6} \right) \frac{7}{8} 4\pi + \\ &\quad \tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{3,7,2} + 1 - V_{3,6,3} + 1 - V_{4,6,2}}{6} \right) \frac{7}{8} 4\pi ] + \\ &2 \sum_{i=0}^1 \left[ \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{1 - V_{i,7,2} + 1 - V_{i,6,3} + 1 - V_{i+1,7,2} + 1 - V_{i+1,6,3}}{4} \right) \frac{3\pi}{4} + \right. \\ &\quad \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{1 - V_{i,7,0} + 1 - V_{i,6,-1} + 1 - V_{i+1,7,0} + 1 - V_{i+1,6,-1}}{4} \right) \frac{3\pi}{4} + \\ &\quad \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{1 + 1 - V_{i,1,-1} + 1 + 1 - V_{i+1,1,-1}}{4} \right) \frac{3\pi}{4} + \\ &\quad \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{1 + 1 - V_{i,1,3} + 1 + 1 - V_{i+1,1,3}}{4} \right) \frac{3\pi}{4} ] + \\ &2 \sum_{j=2}^4 \left[ \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{1 - V_{4,j,2} + 1 - V_{3,j,3} + 1 - V_{4,j+1,2} + 1 - V_{3,j+1,3}}{4} \right) \frac{3\pi}{4} + \right. \\ &\quad \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{1 - V_{4,j,0} + 1 - V_{3,j,-1} + 1 - V_{4,j+1,0} + 1 - V_{3,j+1,-1}}{4} \right) \frac{3\pi}{4} ] + \\ &2 [2\tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{2,7,1}}{4} \right) + 2\tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{4,5,1}}{4} \right) + 2\tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{4,2,1}}{4} \right) + 2\tilde{\epsilon} \frac{1}{4}] + \\ &\sum_{i=0}^1 \sum_{j=2}^4 \left[ \tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{i,j,-1} + 1 - V_{i+1,j,-1} + 1 - V_{i,j+1,-1} + 1 - V_{i+1,j+1,-1}}{4} \right) + \right. \\ &\quad \tilde{\epsilon} \left( \frac{1 - V_{i,j,3} + 1 - V_{i+1,j,3} + 1 - V_{i,j+1,3} + 1 - V_{i+1,j+1,3}}{4} \right) \left. \right] \end{aligned} \quad (38)$$

上面算出的电容单位为静电制电容单位, 以后记为  $C(\epsilon, \tilde{\epsilon})$ 。当被测木材的介电常数等于  $\epsilon$ ,  $R^3 - D - D_1 - D_2$  部分的介电常数等于  $\tilde{\epsilon}$  时, 检测电容器的电容量值。为简单计, 我们取  $\tilde{\epsilon} = 1$  (真空或大气

状态, 即意味传感器电极与被测木材无接触),  $\epsilon$  分别取 1.1, 1.2, 1.3, ..., 8.0 时, 按上述方法用计算机近似算得  $C(1.0, 1) = 21.582$ ;  $C(1.1, 1) = 21.621$ ;  $C(1.2, 1) = 21.659$ ;  $C(1.3, 1) = 21.695$ ;  $C(1.4, 1) =$

21.730;  $C(1.5, 1) = 21.764$ ;  $C(1.6, 1) = 21.796$ ;  
 $C(1.7, 1) = 21.828$ ;  $C(1.8, 1) = 21.859$ ;  $C(1.9, 1) = 21.890$ ;  
 $C(2.0, 1) = 21.919$ ;  $C(2.1, 1) = 21.948$ ;  
 $C(2.2, 1) = 21.976$ ;  $C(2.3, 1) = 22.003$ ;  $C(2.4, 1) = 22.030$ ;  
 $C(2.5, 1) = 22.056$ ;  $C(2.6, 1) = 22.082$ ;  
 $C(2.7, 1) = 22.107$ ;  $C(2.8, 1) = 22.132$ ;  $C(2.9, 1) = 22.156$ ;  
 $C(3.0, 1) = 22.180$ ;  $C(3.1, 1) = 22.202$ ;  
 $C(3.2, 1) = 22.225$ ;  $C(3.3, 1) = 22.247$ ;  $C(3.4, 1) = 22.269$ ;  
 $C(3.5, 1) = 22.291$ ;  $C(3.6, 1) = 22.312$ ;  
 $C(3.7, 1) = 22.333$ ;  $C(3.8, 1) = 22.353$ ;  $C(3.9, 1) = 22.373$ ;  
 $C(4.0, 1) = 22.393$ ;  $C(4.1, 1) = 22.412$ ;  
 $C(4.2, 1) = 22.431$ ;  $C(4.3, 1) = 22.450$ ;  $C(4.4, 1) = 22.469$ ;  
 $C(4.5, 1) = 22.487$ ;  $C(4.6, 1) = 22.505$ ;  
 $C(4.7, 1) = 22.523$ ;  $C(4.8, 1) = 22.540$ ;  $C(4.9, 1) = 22.557$ ;  
 $C(5.0, 1) = 22.574$ ;  $C(5.1, 1) = 22.591$ ;  
 $C(5.2, 1) = 22.607$ ;  $C(5.3, 1) = 22.623$ ;  $C(5.4, 1) = 22.639$ ;  
 $C(5.5, 1) = 22.655$ ;  $C(5.6, 1) = 22.671$ ;  
 $C(5.7, 1) = 22.686$ ;  $C(5.8, 1) = 22.701$ ;  $C(5.9, 1) = 22.716$ ;  
 $C(6.0, 1) = 22.731$ ;  $C(6.1, 1) = 22.745$ ;  
 $C(6.2, 1) = 22.760$ ;  $C(6.3, 1) = 22.774$ ;  $C(6.4, 1) = 22.788$ ;  
 $C(6.5, 1) = 22.802$ ;  $C(6.6, 1) = 22.816$ ;  
 $C(6.7, 1) = 22.829$ ;  $C(6.8, 1) = 22.842$ ;  $C(6.9, 1) = 22.856$ ;  
 $C(7.0, 1) = 22.869$ ;  $C(7.1, 1) = 22.882$ ;  
 $C(7.2, 1) = 22.894$ ;  $C(7.3, 1) = 22.907$ ;  $C(7.4, 1) = 22.919$ ;  
 $C(7.5, 1) = 22.932$ ;  $C(7.6, 1) = 22.944$ ;  
 $C(7.7, 1) = 22.956$ ;  $C(7.8, 1) = 22.968$ ;  $C(7.9, 1) = 22.980$ 。

从计算数值上看, 当  $\epsilon = 1$  时,  $C(\epsilon, \tilde{\epsilon})$  关于介电常数  $\epsilon$  近似于一个线性函数, 通过最小二乘法拟合近似得到

$$C(\epsilon, 1) \approx 0.1939 \epsilon + 21.5522 \quad (39)$$

求其反函数得到

$$\epsilon \approx \frac{C - 21.5522}{0.1939} \quad (40)$$

若电容单位取法拉, 则有

$$\epsilon \approx \frac{C \times 9 \times 10^{11} - 21.5522}{0.1939} \quad (41)$$

其中  $\epsilon$  为采用静电单位制时, 电介质的相对介电系数。

这样就得到了被测木材的介电常数在 1.0 到 8.0 范围内时, 该种尺寸被测木材的介电常数  $\epsilon$  与检测电容器的电容量值  $C$  的函数关系。

为提高计算精度, 在后期的函数拟合时, 还可以

采用高次插值和分段插值的办法进行函数逼近。

如上面例子中可用分段线性插值的办法得到。当  $\tilde{\epsilon} = 1$  时,  $C(\epsilon, \tilde{\epsilon})$  关于介电常数  $\epsilon$  的近似分段函数

$$C(\epsilon, 1) \approx \begin{cases} 0.3406 \epsilon + 21.2485 & \epsilon \in [1, 2) \\ 0.3406 \epsilon + 21.2485 & \epsilon \in [2, 3) \\ 0.2154 \epsilon + 21.5354 & \epsilon \in [3, 4) \\ 0.1825 \epsilon + 21.6647 & \epsilon \in [4, 5) \\ 0.1577 \epsilon + 21.7868 & \epsilon \in [5, 6) \\ 0.1386 \epsilon + 21.9005 & \epsilon \in [6, 7) \\ 0.1231 \epsilon + 22.0076 & \epsilon \in [7, 8] \end{cases} \quad (42)$$

## 5 结论与讨论

我们给出了单一平面电容传感器的工作原理、数学模型和近似计算方法。该方法的优点是具有可推广性, 不仅可以应用于各种规格的被测木材和其他被测物, 而且理论完整、算法收敛、误差可控, 完全可用于本课题所研究的工程实际问题。

还应该注意到, 如检测精度要求愈来愈高时, 需要将差分格式的步长不断减小, 而此时需要求解的线性方程组的阶数, 将是步长倒数的立方量。这样计算量增加速率较大, 对计算机性能要求相应提高。以后将根据工程实际需要, 对更高效算法做进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] 向莉, 董永贵. 同面散射场电容传感器的电极结构与敏感特性[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2004, 44(11): 1 471-1 474.
- [2] 董恩生, 董永贵, 吕文尔, 等. 同面多电极电容传感器的仿真与实验研究[J]. 机械工程学报, 2006(2): 1-6.
- [3] 贺庆之, 贺静. 单一平面电容传感器原理与应用[J]. 工业仪表与自动化装置, 2001(5): 62-63.
- [4] 戴恒震, 孙宝元, 毛范海, 等. 用四单元电容传感器测量绝缘纸的微水分分布[J]. 大连理工大学学报, 2005, 45(2): 215-219.
- [5] 翟宝峰, 梁清华. 检测粮食水分用的电容式传感器[J]. 传感器技术, 2003, 22(2): 29-31.
- [6] 刘少刚, 孟庆鑫, 罗跃生, 等. 任意结构形状的电容传感器原理和数学模型[J]. 北京林业大学学报, 2008, 30(4): 17-21.
- [7] 郭敦仁. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1965: 235-433.
- [8] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 235-308.

(责任编辑 李文军)