

三角函数干形方程与广义 Brink 干形方程的比较

聂秀琴 李 昀 陈名腾 聂 盈 刘凤媛

(北京林业大学信息学院)

摘要: 利用来自澳大利亚新南威尔士州不同生长条件下的辐射松人工林样木干形数据, 比较三角函数干形方程与广义 Brink 干形方程对估计树干任意高度处对应去皮直径的效果; 利用非线性回归拟合干形方程中的参数, 将拟合残差、预测均方误差、绝对偏差、决定系数等作为评判准则。结果表明: 通过样本数据回归拟合得到方程中的参数后, 用三角函数干形方程预测新的干形数据集中给定树干上任意高度对应的去皮直径时, 估计结果更准确; 三角函数干形方程对树干底部直径的估计结果要优于广义 Brink 干形方程, 且三角函数干形方程对树干整体拟合结果更稳定。另外, 依据三角函数干形方程参数估计结果将其化简并检验化简后的拟合效果, 从而证明三角函数干形方程的易变形性及灵活性。

关键词: 广义 Brink 干形方程; 三角函数干形方程; 残差; 决定系数

中图分类号: S758.1 文献标志码: A 文章编号: 1000-1522(2012)05-0120-08

NIE Xiu-qin; LI Yun; CHEN Ming-teng; NIE Ying; LIU Feng-yuan. **Comparing trigonometric variable-form taper function with generalized Brink stem profile function.** *Journal of Beijing Forestry University* (2012) **34**(5) 120-127 [Ch, 14 ref.] School of Information Science & Technology, Beijing Forestry University, 100083, P. R. China.

Using sample taper data collected from *Pinus radiata* plantations at different sites of New South Wales State, Australia, this paper compares trigonometric variable-form taper function (Bi function) with generalized Brink stem profile function (GB function) when estimating diameter under bark at any height of stem. Nonlinear least square regression was used to estimate parameters of both functions. The residual errors, mean square error of prediction, mean absolute difference of prediction and determination coefficient were chosen as the criteria for evaluation of the fitting effective. Results showed that after the parameters in the two taper functions were obtained by regression, Bi function performed more accurately than GB function in predicting diameter under bark at any height of stems; the Bi function was superior to GB function on bottom stem fitting effect, and the Bi function was overall stabler than GB function. In addition, based on parameter estimating results, the Bi function is simplified and the fitting effect of the simplified taper function has been validated, which verifies the deformation and flexibility of Bi function.

Key words GB function; Bi function; residual; determination coefficient

干形方程(stem profile function)是描述树干形状随高度变化的函数,因其能够反映树干的尖削程度,也被称为削度方程(taper function)。干形方程可以用于估算树干任意高度对应的带皮或去皮直径,进而可以用于估算树干材积和生物量,以及作为后续设计造材方案的依据。由于利用干形方程能够计算出树干任意部位的直径(带皮或去皮)及其对应的距地面高度,因此适用于设计各种规格的最优

造材方案。这些作用使得干形方程一直被林业相关研究所关注^[1]。干形方程的构造形式多种多样,常见的有将树干分段分别建立回归方程的形式、多项式型、指数型及无参数型等。大多数干形方程是依据某一特定样地或特定树种的观测数据构造的,适用范围有限,且对直径的估计结果存在较大的局部误差,也不能够表示出不同树干之间的差异^[2];因此,一些研究人员致力于建立通用的、具有灵活适应

收稿日期: 2012-03-13

基金项目: 林业公益性行业科研专项(200904003-6)。

第一作者: 聂秀琴。主要研究方向: 信息管理与信息系统。电话: 15210508570 Email: xiuqinluoyang@163.com 地址: 100083 北京市清华大学东路35号北京林业大学信息学院178信箱。

责任作者: 李昀, 博士, 副教授。主要研究方向: 信息管理与信息系统、林业信息化。电话: 010-62338246 Email: liyun@bjfu.edu.cn 地址: 同上。

本刊网址: <http://journal.bjfu.edu.cn>

性的干形方程。如 Riemer 等^[3]在 Brink 等^[4]依据 2 个经典衰减函数构造的 Brink 干形方程的基础上修正构造的少参数型 Brink 干形方程,替代了仅适合于单一树种或单一林分的干形方程,能够用于描述不同立地、不同密度和不同年龄的林分林木树干任意高度处直径的变化,实现了干曲线的广义模拟^[5]。另外,指数型干形方程的发展也成为通用干形方程的另一个重要分支,Kozak^[6-7]使用单一连续函数作为基础构造干曲线方程,指数部分表示干形随树干从底部至树梢的变化。不过,Kozak 干形方程为了降低直径估计结果的局部误差,对树干的不同部分采用分段函数形式,使得变量之间存在互相关,导致最小二乘回归估计的不稳定及干形方程中参数估计结果的标准差增大^[2]。而后,Bi^[2]从树干几何构造特点出发,利用傅里叶变换构造了易变形的三角函数干形方程,并且通过和 Kozak 干形方程对比,显示了其稳定性和灵活适用性,以及对商用材直径的估计准确性都优于前者,而且在利用三角函数干形方程估计澳大利亚桉树(*Eucalyptus* spp.)和辐射松(*Pinus radiata*)任意树高处的直径时得到了满意的结果^[2,8]。对于干形方程的通用性和拟合效果的研究一直没有间断过,近期有文献提及三角函数干形方程对北美阿卡迪亚地区的红杉(*Sequoia sempervirens*)和白松(*P. strobus*)去皮直径的估计效果优于其他的候选干形方程^[1]。

本文旨在通过常用的统计检验指标,比较广义 Brink 干形方程和三角函数干形方程对来自于不同生长环境及不同密度的辐射松人工林干形的拟合效果,并结合 2 个干形方程自身的结构特点进一步讨论这 2 个干形方程在实际应用中的灵活性和适用范围。

1 数据来源及预处理

本文采用的辐射松干形数据是从 Bi 用于构造辐射松干形方程的数据集中随机抽取的 500 株样木数据^[8]。该样本数据是由澳大利亚新南威尔士州不同立地、不同密度和不同年龄的辐射松人工林分中样木伐倒后实测得到的。这些样木分别取自经过疏伐和未经疏伐的林分,且林龄范围在 10~47 a 之间。尽管时间上存在一定的跨度,但是干形指标的测量是相对连续的。这些干形数据包括带皮胸径、去皮胸径、地面直径和分段测量的带皮直径、去皮直径,以及皮厚及林分信息等。样木全树高与去皮胸径之间的关系详见图 1。其中样木的去皮胸径介于 5~70 cm 之间,将去皮胸径依据 5 cm 间隔分成小于等于 10、10~15、15~20、20~25、25~30、30~35、

35~40、40~45、45~50、50~55、55~60、60~65、65~70 cm 共 13 组,各组去皮胸径的分布详见图 2。干形数据中相对树高与相对直径之间的关系见图 3。

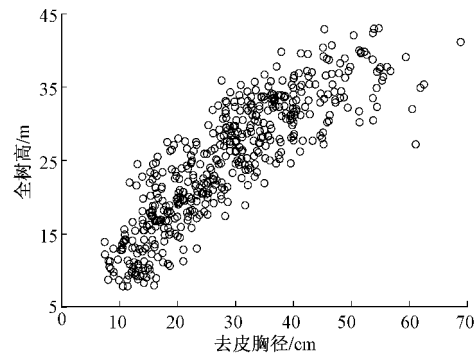


图1 样木全树高与去皮胸径的散点图

Fig. 1 Total height plotted against diameter of breast height under bark (DBH_{UB}) of the sample trees

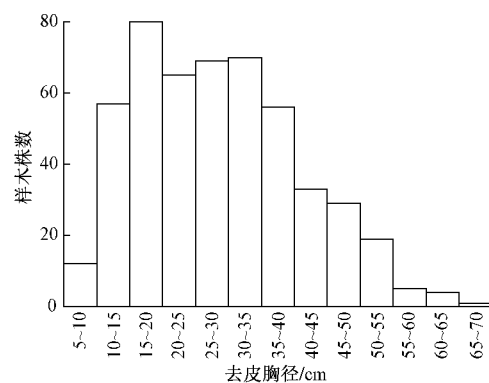


图2 样木去皮胸径的密度分布

Fig. 2 DBH_{UB} distribution of the sample trees

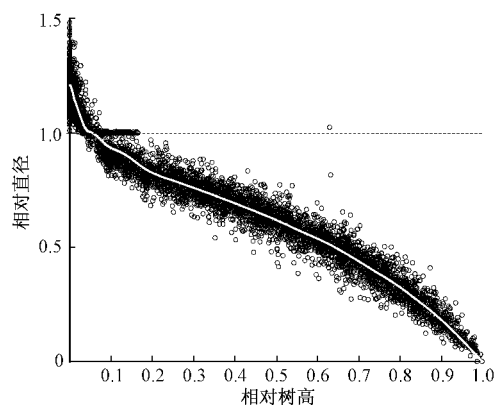


图3 相对直径与相对树高的关系图

Fig. 3 Relative height plotted against relative diameter of sample data

在数据预处理过程中,首先是补充缺失值,其次是计算每条记录的相对树高及相对直径,因为三角函数干形方程是关于相对树高与相对直径之间的函数。

2 干形方程

2.1 Brink 干形方程

Brink 等^[4]依据理想的干形底部的凹函数性及顶部的凸函数性,将干形看作是绕拐点逆时针旋转 90°的 S 型生长曲线,目前已有许多描述 S 型生长曲线的函数,其中最常见的是生长方程。Brink 等根据直径随树高的变化率符合生长方程及衰减函数这一规律通过积分构造得到 Brink 干形方程,方程中含有 i 、 p 和 q 3 个参数。在此基础上,Riemer 等^[3]对其进行修正得到少参数干形方程,其形式为:

$$\begin{aligned} r(H) &= u + ve^{-pH} - we^{qH} \quad (1) \\ u &= \frac{i}{1 - e^{q(1.3-H_T)}} + (r_{1.3} - i) \left(1 - \frac{1}{1 - e^{p(1.3-H_T)}}\right) \\ v &= \frac{(r_{1.3} - i)e^{1.3p}}{1 - e^{p(1.3-H_T)}} \\ w &= \frac{ie^{-qH_T}}{1 - e^{q(1.3-H_T)}} \end{aligned}$$

式中: $r(H)$ 为树高 H 处对应的半径, cm; H_T 为全树高, m; H 为地表以上至树干顶端任意点的树干高度, m; $0 < H \leq H_T$; $r_{1.3} = r(1.3)$, 表示胸半径, cm; i 为统一渐近线的参数; p 为描述干形底部向外弯曲程度的参数; q 为描述干形顶部向内弯曲程度的参数。

Brink 干形方程的优势在于结构简单,参数 i 、 p 和 q 很容易通过回归拟合得到,也可以直接用于原木材积的计算;但是,Brink 干形方程中的参数 i 、 p 和 q 与树种、样地条件等相关,其中参数 p 与林分密度呈负向弱相关,参数 q 与林分密度呈正向弱相关,每株树对应一组参数 i 、 p 和 q 的估计值。Brink 等^[4]曾采用该方程分别对 10 株桉树拟合,得到 10 组参数 i 、 p 和 q 的估计值;佟金权等^[9]也曾采用该方程对 52 株杉木(*Cunninghamia lanceolata*)拟合得到 52 组参数 i 、 p 和 q 的估计值。即 Brink 干形方程对不同立地环境下的同种树种也不存在统一的参数估计结果。

2.2 广义 Brink 干形方程

为了实现 Brink 干形方程的通用性,Gadow 等^[10]通过试验将其推广为广义 Brink 干形方程,分别利用式(2)、(3)及(4)代替式(1)中的参数 i 、 p 和 q ,并且通过实验验证了推广后的 Brink 干形方程可以对不同立地环境条件下的同种林木干形进行较精确的描述。

$$i = k_1 d^{k_2} \quad (2)$$

$$p = e^{\frac{k_3}{D_g}} \quad (3)$$

$$q = k_5 e^{\frac{k_6}{D_g}} H_T^{k_4} \quad (4)$$

式中: k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 、 k_5 、 k_6 为参数; d 为胸径; D_g 为林分平均

胸(直)径。广义 Brink 干形方程满足:当 $H = H_T$ 时 $r(H) = 0$;当 $H = 1.3$ 时 $r(H) = r_{1.3}$ 。

广义 Brink 干形方程是多项式形式的,参数 p 和 q 分别表示树干底部向外弯曲和树干顶部向内弯曲的程度。由于树干顶部与底部干曲线变化率较大,不仅能够描述不同林分的林木树干任意树高处直径随树干高度的变化,而且可以精确描述来源于不同环境的同种原木的干形,即用来描述不同立地、不同密度和不同年龄林分的林木树干直径随树高变化的曲线。文献[9]曾采用广义 Brink 干形方程对 52 株杉木拟合得到一组去皮直径对应的参数 k_1 、 k_2 、 \dots 、 k_6 ,并通过与前述的采用 Brink 干形方程的拟合结果对比发现,广义 Brink 干形方程替代仅适用于单株木的 Brink 干形方程实现了对树干干形的广义模拟。

2.3 三角函数干形方程

Bi^[2]从树干形状结构出发,利用树干从地面至任意高度或任意直径处的材积与整株树干的材积比率 $R_h(R_d)$ 公式^[11]变换构造得到三角函数干形方程。其思想是:若把整株树干的材积看作 1,材积比率就随着相对树高的变化在 0 到 1 之间变化。任意高度对应的材积比可以表示为关于相对树高的函数,即 $R_h = f_1(h)$,类似地,相应高度处对应的材积比可以表示为关于相对直径的函数,即 $R_d = f_2(d)$ 。对于树干的任意树高处材积比 $R_h = R_d$,即 $f_1(h) = f_2(d)$,这样通过变换得到相对直径关于相对树高的函数 $d = f_2^{-1}(f_1(h))$,则通过构造得到三角函数干形方程。Bi 同时采用 25 种来源于不同地区不同生长环境的桉树实测干形数据拟合得到该干形方程中参数的值,同时验证了三角函数干形方程对桉树直径的估计结果。

三角函数干形方程的特点在于基函数和指数 K 。基函数的构造依据干形材积的变化率,指数 K 是通过傅里叶变换得到的,而且三角函数干形方程严格通过点(1.3, DBH_{UB}),其形式为:

$$\begin{aligned} d &= B^K = \left(\frac{\ln \sin(\frac{\pi}{2}h)}{\ln \sin(\frac{\pi}{2}b)} \right)^K \\ B &= \frac{\ln \sin(\frac{\pi}{2}h)}{\ln \sin(\frac{\pi}{2}b)} \quad (5) \end{aligned}$$

$$K = a_1 + a_2 \sin(\frac{\pi}{2}h) + a_3 \cos(\frac{3\pi}{2}h) + a_4 \sin(\frac{\pi}{2}h) /$$

$$h + a_5 \text{DBH}_{\text{OB}} + a_6 h \sqrt{\text{DBH}_{\text{OB}}} + a_7 h \sqrt{H_T}$$

式中: d 为相对直径; $d = \text{DUB} / \text{DBH}_{\text{UB}}$, DUB 为相对

树高 h 处的去皮直径 d , cm, DBH_{UB} 为去皮胸径, cm; K 是关于相对树高、带皮胸径及总树干高函数的指数; h 为相对树高 $h = H/H_T$; b 为相对胸高 $b = 1.3/H_T$; DBH_{OB} (diameter of breast height over bark) 为带皮胸高直径, cm; a_1, a_2, \dots, a_7 为参数。

三角函数干形方程是关于相对树高与相对直径的指数型方程, 基函数是依据干形材积的变化率构造的函数。指数 K 中前 3 项三角函数部分用于表示干形随树高的变化, 后 3 项描述不同大小的同树种的干形变化。由于三角函数干形方程结构灵活易变形, 这也为参数估计提供了很多不同的方法。

3 参数估计方法与评价标准

3.1 参数估计

首先, 通过回归方法拟合出方程中的参数。一般的最小二乘线性回归分析要求满足残差之间相互独立, 且服从均值为 0、方差为常数的正态分布^[1-12]。当数据集存在自相关和异方差性时, 最小二乘回归系数仍旧是无偏的和一致的, 但却不再有效^[13]。由于干形数据集中同一株树干上测得的不同高度的直径是分层的且各个量之间是相关的, 因此, 线性回归方法不能满足研究需要; 然而误差项的自相关及方程中参数的多重共线性对非线性回归结果影响较小^[7], 因此本文采用 SAS 软件中的非线性回归分析过程 NLIN 分别对 2 个干形方程中的参数进行估计。在非线性的初始值处理上, 广义 Brink 干形方程采用随机定义初值; 三角函数干形方程采用其线性回归分析参数拟合结果作为非线性回归分析的初始值进行参数估计, 以减少参数估计的迭代次数^[8]。

其次, 为了保证干形方程对直径估计结果的精确度, 本文在进行参数估计时采用无偏的交叉留一法; 但是当样本数据集非常庞大时, 采用交叉留一法需要迭代的次数太多且费时, 即较高的计算成本限制了交叉留一法的实际应用。由于本文所用 500 株辐射松干形数据共 7 000 条记录, 这样分别对 2 个干形方程采用快速交叉留一法^[14]拟合干形方程中的参数, 即把数据集分成 5 个不相容的子集, 每个子集中包含 100 株辐射松的干形数据, 每次进行拟合参数和预测直径时留一个子集作为检验样本, 利用拟合得到的参数预估检测样本的实测直径对应高度的直径, 重复进行 5 次。通过对比预估得到的直径与相对应的实测直径, 检验预测平均误差 (MEP)、预测均方误差 (MSEP)、预测绝对偏差 (MAEP) 和决定系数 (R^2), 比较参数估计结果的准确度和泛化功能。

MEP、MSEP、MAEP 和 R^2 的计算公式^[12-13]为:

$$MEP = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) / n \quad (6)$$

$$MSEP = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n \quad (7)$$

$$MAEP = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| / n \quad (8)$$

$$R^2 = SSR/SST = 1 - SSE/SST =$$

$$1 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (9)$$

式中: y_i 为第 i 个变量的实测值, \hat{y}_i 为第 i 个变量通过回归拟合得到的预测值, \bar{y} 为实测值的平均值, SSR 为总的回归平方和, SST 为总的离差平方和, SSE 为拟合残差平方和。

3.2 评价标准

常用的判断回归模型拟合优度的指标包括决定系数、均方误差、绝对偏差等, 而预测平均误差 (MEP)、预测均方误差 (MSEP)、预测绝对偏差 (MAEP) 和决定系数 (R^2) 在评价林业相关模型中的参数估计结果时更为常用^[12]; 因此, 本文在比较 2 个干形方程对树干直径的估计结果时主要考虑: 1) 模型的拟合统计量, 即决定系数、预测均方误差、预测绝对偏差等。决定系数反应直径拟合结果对直径实测值解释的比例, 预测均方误差反应拟合的整体效果, 预测绝对偏差则表示拟合结果偏离实测值的程度。2) 比较残差和绝对偏差的分布。首先, 比较干形方程对直径整体拟合结果的残差分布; 其次, 依据胸径的大小将数据集分为 6 组, 绘制 2 个干形方程对直径拟合结果的残差和绝对偏差分布图, 比较干形方程对不同大小树木干形的拟合结果。绝对偏差主要反映干形方程拟合单株木干形时偏离实测值的程度, 比较绝对偏差的分布有助于描述单株木干形变化和对单株木造材时干形方程的选择。3) 从方程本身易变形性以及适应性出发, 比较相应参数估计过程是否容易实现和干形方程的适用范围等。另外, 一个好的干形方程不仅对树干直径的拟合结果是无偏的且方差要求尽可能小。

在比较 2 个干形方程估计结果的残差分布时, 将树高化成相对树高 h 后分成 10 个等级, 利用残差结果计算相应的均方误差和决定系数。为了保证比较指标的统一, 将广义 Brink 干形方程计算得到的半径转化成直径, 将三角函数干形方程计算得到的相对直径转化成绝对直径, 再计算各自的残差。

4 结果与分析

4.1 参数估计结果

预估得到的直径与实测直径之间的预测均方误差和预测平均绝对偏差见表 1, 对应 2 个干形方程

最终参数估计的结果见表 2、3。在对比 2 个干形方程参数估计结果的准确性时,将三角函数估算得到的相对直径转化为绝对直径,将广义 Brink 干形方程估算得到的半径转化成直径。

表 1 2 个干形方程的预测均方误差和预测平均绝对偏差的比较

Tab. 1 Comparing MSE and MAEP of two stem taper functions

N	广义 Brink 干形方程		三角函数干形方程	
	MSEP	MAEP	MSEP	MAEP
7 000	1. 865 6	0. 892 7	1. 712 2	0. 870 2

注: N 表示 500 株辐射松样本共测得的干形数。

表 2 广义 Brink 干形方程参数估计的结果

Tab. 2 Results of parameter estimation for GB function

参数	估计值	近似标准误
k_1	0. 478 3	0. 004 6
k_2	0. 992 8	0. 002 3
k_3	- 3. 502 0	0. 014 6
k_4	- 1. 238 4	0. 001 8
k_5	4. 803 5	0. 020 2
k_6	- 7. 078 5	0. 048 5

表 3 三角函数干形方程参数估计的结果

Tab. 3 Results of parameter estimation for Bi function

参数	估计值	近似标准误
a_1	0. 249 5	0. 024 8
a_2	0. 387 7	0. 012 5
a_3	0. 067 3	0. 003 6
a_4	- 0. 146 6	0. 014 6
a_5	0. 000 567	0. 000 06
a_6	- 0. 002 09	0. 002 02
a_7	- 0. 030 6	0. 002 4

广义 Brink 干形方程对应的预测平均误差 $MEP_C = 0. 046 3$,三角函数干形方程对应的预测平均误差 $MEP_B = 0. 055 4$ 。从表 1 可以看出,三角函数干形方程对直径估计的 MSE 和 MAEP 均小于广义 Brink 干形方程,表明三角函数干形方程通过样本估计得到参数后,再采用三角函数干形方程估算新一批树干的直径时,估计结果要优于广义 Brink 干形方程。

表 2、3 分别为采用回归拟合得到的 2 个干形方

程中参数的估计值。由于本文采用的数据是 Bi 等^[8]在采用三角函数干形方程拟合辐射松干形的数据集中随机抽取的,所以将表 3 中参数估计的结果与文献[8]中参数估计的结果进行比较(见表 4)。可以看出,本文与文献[8]的参数估计结果的近似标准误差比较接近,参数 a_5 的值都相对较小。由于样本数据集的差异及采用参数估计的方法不同,文献[8]对 3 251 株辐射松进行参数估计时,将三角函数干形方程两边取对数后采用交叉留一法进行回归拟合,而本文对干形方程直接采用快速交叉留一法进行回归拟合,所以最终参数估计的结果不同。另外,由干形方程中 K 的结构可以看出,参数 a_5 和 a_6 均与树干带皮胸径相关,当 a_5 较大时, a_6 会相对减小;由表 4 可以看出,2 组参数的估计结果均符合此规律,而且近似标准误差也表明本文参数估计的结果是可信的。

表 4 与文献[8]中三角函数干形方程参数估计结果的比较

Tab. 4 Comparing parameter estimation for Bi function in this paper with that in reference [8]

参数	估计值		近似标准误	
	本文	文献[8]	本文	文献[8]
a_1	0. 249 5	0. 821 83	0. 024 8	0. 026 03
a_2	0. 387 7	- 0. 101 93	0. 012 5	0. 012 42
a_3	0. 067 3	- 0. 008 72	0. 003 6	0. 002 42
a_4	- 0. 146 6	- 0. 371 45	0. 014 6	0. 014 10
a_5	0. 000 567	- 0. 001 12	0. 000 06	0. 000 06
a_6	- 0. 002 09	0. 037 41	0. 002 02	0. 000 97
a_7	- 0. 030 6	- 0. 036 72	0. 002 4	0. 000 61

4. 2 估计效果比较

采用干形方程进行回归拟合得到直径的预估值与实测值之间的残差和总离差(见表 5)。由于对 2 个干形方程进行参数估计时使用的是相同的数据集,所以表 5 中总离差统计量是相同的。根据直径的预测值与实测值之间的矩统计量分布,可以计算出广义 Brink 干形方程对直径进行非线性回归分析的校正后决定系数($R^2 = 0. 990 1$)和预测均方误差($MSEP = 1. 865 6$),以及三角函数干形方程对应的校正后的决定系数($R^2 = 0. 990 5$)和预测均方误差($MSEP = 1. 712 2$)。对比表 1 和表 5 的计算结果发

表 5 2 个干形方程对直径拟合结果的残差及总离差的统计量

Tab. 5 Statistics of residual and total deviation about fitting diameters for two stem taper functions

统计量	残差		总离差	
	Brink 干形方程	三角函数干形方程	Brink 干形方程	三角函数干形方程
N	7 000	7 000	7 000	7 000
均值	0. 046 3	0. 045 8	0. 000 031	0. 000 031
标准偏差	1. 365 9	1. 308 5	13. 756 3	13. 756 3
方差	1. 865 6	1. 712 2	189. 236 5	189. 236 5
未校正平方和	13 072. 219 7	12 752. 049	1 324 466. 17	1 324 466. 17
校正后平方和	13 057. 217 6	12 587. 838 4	1 324 466. 17	1 324 466. 17

现,三角函数干形方程对干形直径整体估计结果比广义 Brink 干形方程估计结果稳定。

依据树干高度将样本数据分成 10 个等级,用于判断 2 个干形方程对不同树高等级内干形拟合结果的残差分布,计算各个相对树高范围内直径实测值与估计值之间的拟合残差分布(见图 4)。当 $h < 0.2$ 时,三角函数干形方程对直径预测的平均预测偏差较小;当 $0.2 < h < 0.4$ 时,广义 Brink 干形方程对直径预测的平均预测偏差较小;当 $h > 0.8$ 时,三角函数干形方程对直径预测的平均残差小于实测值,而广义 Brink 干形方程对直径预测的平均残差则大于实测值。在估计不同树高等级内林分的蓄积时,根据相对直径的分布,选择恰当的干形方程,以提高估计的准确性。

为了进一步检验 2 个干形方程对于不同大小的辐射松干形的拟合结果,依据去皮胸径的大小把数据集分成胸径小于 20、20 ~ 30、30 ~ 40、40 ~ 50、50 ~ 60 和大于 60 cm 共 6 组,计算干形方程对各个分组内树干直径拟合的平均残差(图 5)。从图中可以发现:对于去皮胸径大于 60 cm 的树干,相对树高 h 在 0.2 ~ 0.5 之间时,三角函数干形方程对直径的预测平均误差较大,2 个干形方程对于相对树高介于 0.6 ~ 1.0 之间的干形直径预测结果均大于实测值;对于去皮胸径小于 30 cm 的树干,2 个干形方程对树干顶部的拟合结果均小于其实测值,而对于去皮胸径大于 30 cm 的树干,三角函数干形方程对树

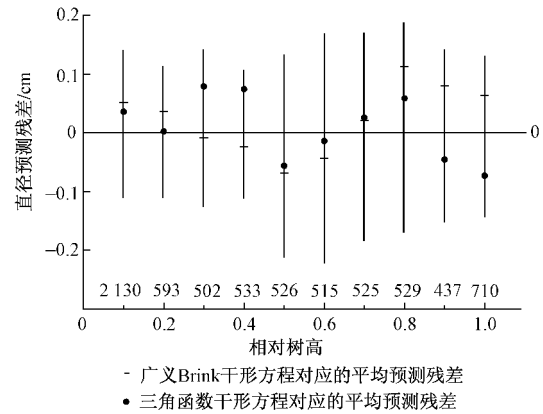


图 4 2 个干形方程对 10 个相对树高等级内直径预估结果的残差分布

Fig. 4 Residual distribution of fitting results about diameter by two stem taper functions along 10 relative height classes

注: 图中数据表示每个相对树高等级内的干形数据量。下同。

顶部的拟合结果要大于实测值。三角函数干形方程对树干底部直径的拟合结果取决于广义 Brink 干形方程;三角函数干形方程整体拟合效果比广义 Brink 干形方程的拟合效果稳定。

图 6 为广义 Brink 干形方程和三角函数干形方程对 6 个分组内干形拟合的平均绝对偏差 (MAEP) 的分布。经对比发现 2 个干形方程对干形整体拟合的偏差也在允许范围之内;容易看出三角函数干形方程对直径的整体拟合绝对偏差小于广义 Brink 干形方程的绝对偏差,尤其当树干去皮胸径在 30 ~ 40 cm 或大于 50 cm 区间时,三角函数干形方程对直径

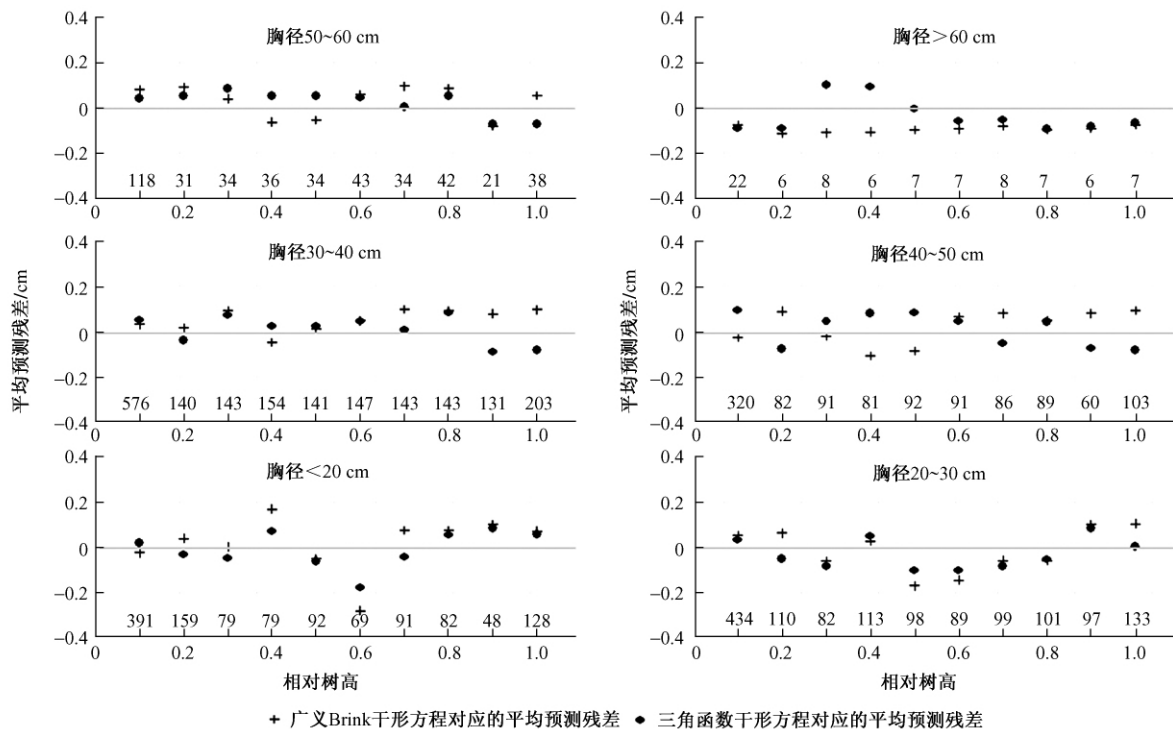


图 5 2 个干形方程对 6 个分组内直径预测结果的平均误差的分布

Fig. 5 Mean errors of prediction distribution of the two stem taper functions in 6 diameter classes

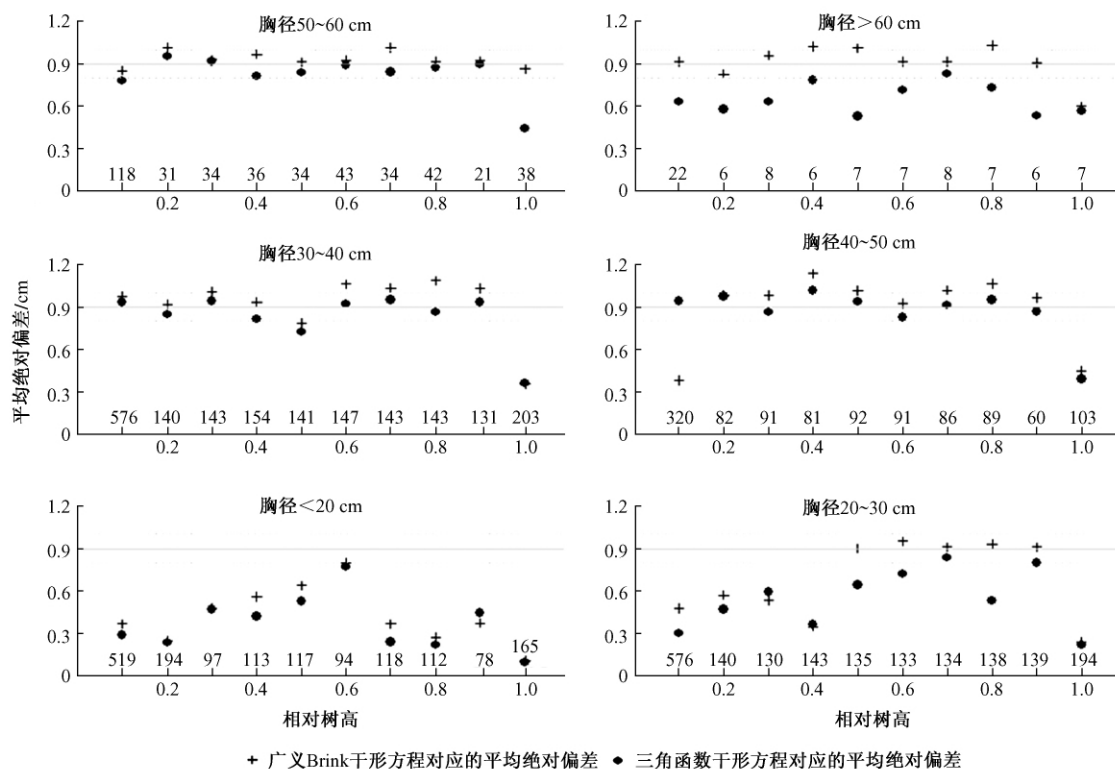


图6 2个干形方程对6个分组内直径预测的预测平均绝对偏差的分布

Fig. 6 MAEP distribution of the two stem taper functions in 6 diameter classes

的拟合偏差小于广义 Brink 干形方程的拟合偏差。因此,当对单株木进行其干形变化的描述时,三角函数干形方程能更准确地描述干形随树高变化而变化的程度。

通过对比分析2个干形方程对树干拟合结果的统计量,得到三角函数干形方程预测结果的均方误差小于广义 Brink 干形方程对应的均方误差,而且从残差分布图不难发现三角函数干形方程对干形的拟合效果总体上更优。

另外,从模型自身结构特点出发比较2个干形方程发现,广义 Brink 干形方程中含有6个参数,三角函数干形方程中含有7个参数。这样,进行最小二乘非线性回归计算相应参数时,三角函数干形方程的共同度要低于广义 Brink 干形方程,相应剩余残差会较大;因为参数的数量也影响了最小二乘非线性回归的参数估计结果。广义 Brink 干形方程是关于绝对树高和绝对直径的干形方程,省略了相对直径转化的步骤;但是广义 Brink 干形方程的 p 和 q 中含有林分平均直径 D_g ,当林分平均直径无法得到时,广义 Brink 干形方程变得不适用。为了扩大其适用范围,需依据林分平均直径 D_g 在干形方程中出现的位置等将其进一步扩展,三角函数干形方程不存在这一限制。三角函数干形方程结构易变形,这样在进行参数估计时容易通过取对数等方法将其转化后利用线性回归分析实现,将线性回归分析得到

的最优解作为非线性参数估计的初值,以提高参数估计的效率。

4.3 三角函数干形方程的化简

Bi最初构造三角函数干形方程采用的是25种来自不同地区不同种的天然林桉树树种的数据,不同地区不同种间干形变化存在差异,为了能够准确描述这些差异,该干形方程的指数部分中除三角函数项外,带皮直径和全树高也作为变量引入。本研究采用的数据集来自于同一树种,由参数估计的结果可以发现参数 a_5 趋于0,也就是说带皮直径的单独影响因素很弱;因此,对结构简单的辐射松人工林数据应用三角函数干形方程时,考虑减少参数个数而将三角函数干形方程化简,并且对原三角函数干形方程与简化后参数估计结果的均方误差进行简化。

当模型指数部分的各个变量之间存在相关性时,数据集发生较小变化将会造成参数估计结果出现较大的误差。为了验证辐射松人工林参数 a_5 的估计值均趋于0,将参数 a_5 对应的变量项剔除化简三角函数干形方程,并检验化简后三角函数干形方程对辐射松的整体拟合结果(表6)。

由参数估计结果直接得到的相对均方误差为0.0237,预测均方误差为1.6243,通过与表3参数估计结果进行比较发现,化简后三角函数干形方程对辐射松的干形拟合结果没有明显的影响;因此,对

于辐射松来说三角函数干形方程中的参数 a_5 对应的指标项与其他 6 个参数对应的指标项之间存在相关性,即参数 a_5 对应的带皮胸径项可以通过其他几项表示;因此,可以通过降维的思想减少参数个数,提高共同度,使得干形拟合结果的残差减小,并减少参数估计占用的内存和时间等。

表 6 化简后三角函数干形方程中参数的估计值

Tab. 6 Estimating results of parameters for simplified Bi function

参数	估计值	近似标准误
a_1	0.170 9	0.023 3
a_2	0.366 8	0.012 3
a_3	0.068 4	0.003 6
a_4	-0.086 3	0.013 1
a_6	0.008 9	0.001 6
a_7	-0.031 6	0.002 4

5 结 论

1) 对比本文和文献[8]中三角函数干形方程中参数的估计结果,发现当样本数据集和参数估计方法不同时,参数估计结果也不相同;但是最终参数估计的近似标准误差均接近且在误差允许范围内,因此可以根据需要选择不同的参数估计方法。

2) 对于已知林分平均直径的人工林,应用广义 Brink 干形方程描述干形变化时更加便捷。广义 Brink 干形方程中含有较少的参数,这样在进行参数估计时,占用的内存更少。

3) 三角函数干形方程对胸径大于 20 cm 的树干的拟合效果要优于广义 Brink 干形方程。三角函数干形方程对树干底部的拟合结果优于广义 Brink 干形方程。三角函数干形方程对树干直径的估计结果整体更稳定,因此在对整个林分估算蓄积量时,三角函数干形方程的估计结果会更优。

4) 对于人工林,三角函数干形方程可以化简且化简后干形方程对直径的估计结果在误差允许范围内,从而证明了三角函数干形方程的易变形性及灵活性。

5) 在实际应用时,当通过样本数据拟合完成干形方程中的参数估计后,由 MSEP 及 MAEP 的对比结果可知,三角函数干形方程对新的一批干形数据进行直径估计或材积研究时结果更准确,这就为采

用干形方程按各种市场需求规格设计最佳造材方案提供了依据,进而为获得最大收益提供了可能。

致谢:本文所采用的样本数据由毕慧泉博士提供,在本研究中承蒙毕博士的指导和帮助,在此深表感谢。

参 考 文 献

- [1] LI R X, WEISKITTEL A R. Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the North American Acadian Region[J]. *Annals of Forest Science*, 2010, 302: 1-16.
- [2] BI H Q. Trigonometric variable-form taper equations for Australian eucalypts[J]. *Forest Science*, 2000, 46(3): 397-407.
- [3] RIEMER T, GADOW K V, SLOBOD B. Ein modell zur beschreibung von baumschaften [J]. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 1995, 166(7): 144-147.
- [4] BRINK C, GADOW K V. On the use of growth and decay functions for modeling stem profiles [J]. *Elektronische Datenverarbeitung in Medizin und Biologie*, 1986, 17(1/2): 20-27.
- [5] 佟金权. 广义干曲线模型在杉木人工林蓄积量测定中的应用[J]. 中南林业科技大学学报: 自然科学版, 2007, 27(2): 93-98.
- [6] KOZAK A. A variable-exponent taper equation [J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 1988, 18: 1363-1368.
- [7] KOZAK A. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions[J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 1997, 27: 619-629.
- [8] BI H Q, LONG Y S. Flexible taper equation for site-specific management of *Pinus radiata* in New South Wales, Australia[J]. *Forest Ecology and Management*, 2001, 148: 79-91.
- [9] 佟金权, 盛炜彤. 杉木人工林广义干形模型的研究[J]. 林业科学研究, 2000, 13(3): 239-248.
- [10] GADOW K V, HUI G Y. *Modelling forest development* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001: 213.
- [11] BI H Q. Predicting stem volume to any height limit for native tree species in southern New South Wales and Victoria [J]. *New Zealand Journal of Forestry*, 1999, 61: 275-286.
- [12] HUANG S, YANG Y, WANG Y. A critical look at procedures for validating growth and yield models[C]//AMARO A, REED D D, SOARES P. *Modelling forest systems*. Wallingford: CABI Publishing, 2003: 271-293.
- [13] MYERS R H. *Classical and modern regression with applications* [M]. 2nd ed. 北京: 高等教育出版社, 2005: 488.
- [14] 刘学艺, 李平, 郜传厚. 极限学习机的快速留一交叉验证算法[J]. 上海交通大学学报, 2011, 45(8): 1140-1145.

(责任编辑 冯秀兰)